Szent István Egyetem

SZEMCSÉS ANYAGOK TERMÉSZETES BOLTOZÓDÁSA

Doktori értekezés tézisei

Keppler István

Gödöllő
2006.

A doktori iskola	
megnevezése:	**Műszaki Tudományi Doktori Iskola**
tudományága:	**Agrárműszaki Tudomány**
vezetője:	**Dr. Szendrő Péter** egyetemi tanár, az MTA doktora Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar Mechanikai és Géptani Intézet Gödöllő
Témavezető:	**Dr. M. Csizmadia Béla** egyetemi tanár, a műszaki tudomány kandidátusa Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar Mechanikai és Géptani Intézet Gödöllő

....	....
Az iskolavezető jóváhagyása	A témavezető jóváhagyása

Tartalom

1. Tudományos előzmények, célkitűzés

A mezőgazdaság, az élelmiszeripar, a gyógyszeripar, valamint az építészet területén dolgozó mérnökök gyakran találkoznak a szemcsés anyaghalmazok különleges mechanikai tulajdonságaiból eredő problémákkal.

1.1. A téma jelentősége

Szemcsés anyaghalmazok bizonyos körülmények között szilárd anyagokhoz hasonlóan viselkednek. Teherviselésre képesek, megőrzik alakjukat. Más körülmények között ugyanaz a szemcsehalmaz, amely korábban szilárd testként volt modellezhető, folyadékhoz hasonló tulajdonságokat mutat. Silóban tárolhatjuk, amelyből gravitációs ürítéssel eltávolíthatjuk. Bizonyos feltételek teljesülése esetén ugyanez a halmaz ismét szilárd testként kezd viselkedni, képessé válik a felette lévő anyagtömeg súlyából adódó terhelések elviselésére, a tárolóból történő kiáramlása megszűnik, mivel a nyílás felett boltozat jön létre.

1. definíció. *Természetes boltozódásnak* nevezi a szakirodalom azt a jelenséget, amely során a szemcsés halmazban a terhelések hatására kialakul egy anyagréteg, amely képes a felette lévő anyagtömeg súlyából eredő terhelések elviselésére.

Bizonyos esetekben a szerkezeteket úgy kell kialakítani, hogy a boltozat ne jöjjön létre. A természetes boltozat megjelenése ugyanis egyrészt akadályozza a szemcsés anyaghalmazok áramlását (pl. a tároló kiürítését), másrészt a boltozatok megjelenése jelentős mértékben módosítja a halmazbeli feszültségviszonyokat. A feszültségviszonyok módosulása pedig a tároló falának többletterhelését, esetleg a tároló károsodását, tönkremenetelét okozhatja.

Más esetekben a kialakuló természetes boltozat teherhordó szerkezetként vehető figyelembe, azaz itt a viszonyokat úgy célszerű kialakítani, hogy a boltozat létrejöjjön. Ilyen esetekkel a bányászatban valamint föld alatti építmények (alagutak, csővezetékek) terhelésviszonyainak vizsgálata során találkozhatunk.

A szemcsés anyagok mechanikájának területén végzett elméleti vizsgálatok olyan erőteljes közelítéseket és elhanyagolásokat hordoznak magukban, hogy az ezekből származó becslések és a mérési eredmények között jelentős az eltérés.

1.2. Tudományos előzmények

A XIX. század végén alkotta meg *Janssen* a silókban kialakuló nyomásviszonyokat leíró differenciálegyenletét. Annak ellenére, hogy az elmúlt több, mint száz év alatt az elmélet jónéhány hiányosságára rámutattak a témával foglakozó kutatók, az Európai Únió szabványgyűjteményében megfogalmazottak tulajdonképpen Janssen 1895-ben elért eredményeinek alkalmazásai.

1. tétel. *Janssen szerint a silóban tárolt szemcsés halmazban kialakuló σ_y függőleges feszültségek meghatározhatók a*

$$\sigma_y = \frac{B\rho g}{2K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{B}y}\right) \tag{1.1}$$

összefüggés segítségével.

B a siló szélessége, K az ún. Janssen konstans, ρ a halmaz sűrűsége. Janssen exponenciális jellegű függőleges feszültségeloszlást kapott a silóban tárolt anyaghalmaz belsejében, amely eloszlást a mérések is igazolták.

Silónyomás méréssel sok szerző foglalkozott Janssen cikkének megjelenése óta. A méréssel kapcsolatban néhány probléma napjainkig sem került megoldásra. *Stroppel* foglalkozik a silónyomás mérésnek azzal az érdekes problémájával, hogy a silófalhoz rögzített nyomásmérő érzékelő elmozdulásának igen kis értéke is jelentősen befolyásolja a mért nyomásértéket.

Sajnálatos módon a szemcsehalmazbeli feszültségviszonyok mérésére jelenleg nem áll a kutatók rendelkezésére kellő pontosságú eredményeket szolgáltató eszköz.

A mérési nehézségek és pontatlanságok következtében egyedül természetes boltozattal átívelhető kritikus nyílásméret meghatározására van lehetőségünk, és minden, a továbbiakban következő feltételezés helyességét csupán ennek a mennyiségnek a mérésével dönthetjük el.

2. definíció. *Kritikus nyílásméretnek* nevezem a siló kifolyónyílásának azt a legkisebb méretét, amelynél az anyag akadálytalanul ki tud folyni a silóból.

A természetes boltozódás vizsgálata során a kutatók – a silókkal kapcsolatos boltozódásvizsgálatoknál – két lényeges kérdés megválaszolására törekedtek.

I. Azon feszültségek meghatározására, amelyek a szemcsés anyag tömörödését okozzák. A tömörödés hatására létrejövő anyagtulajdonság változások következtében a szemcsés anyag képessé válik önsúlyából és esetleg a felette elhelyezkedő anyagréteg súlyából adódó terhelések elviselésére.

II. A természetes boltozatot alkotó szemcsehalmazban keletkező feszültségek meghatározására. A feszültségek és a tönkremeneteli kritériumoknak az ismeretében kívánták meghatározni a boltív teherbírását és ebből a kritikus nyílásméretet. A feszültségviszonyok meghatározása során mindannyian a Jannsen elmélet valamely módosított változatát alkalmazták.

A szakirodalmi forrásokban szereplő kritikus nyílásméretek elméleti úton becsült, és mérésekkel meghatározott értékei között az eltérés gyakran a kétszeres értéket is meghaladja.

Az általam létrehozott boltozódási modell az irodalmi forrásokban szereplő módszerektől eltérően egy teljesen új megközelítésben tárgyalja a szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának folyamatát.

1.3. Célkitűzés

A szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának új modelljét hoztam létre, amelynek felhasználásával a jelenséggel kapcsolatos előrejelzéseim, becsléseim a mérésekkel meghatározható értékekhez közelebb álló eredményekre vezettek, mint az irodalmi források.

I. Dolgozatomban bemutattam a szemcsés halmazok kontinuum modelljében felhasznált anyag- és tönkremeneteli jellemzőket.

II. Összefoglaltam a szemcsés halmazokban kialakuló feszültségviszonyok, valamint a természetes boltozódás jelenségének modellezésével kapcsolatos eddigi eredményeket.

III. Bemutattam a szemcsés halmazok anyagtulajdonságainak valamint a boltozódás jelenségének vizsgálatára szolgáló kísérleti módszereket.

IV. Bemutattam az általam létrehozott új boltozódásvizsgáló berendezést valamint a triaxiális berendezésen általam végzett módosításokat.

V. A boltozódással kapcsolatos kísérleti vizsgálataim alapján bevezettem egy új boltozat kialakulási és tönkremeneteli modellt.

VI. Bemutattam a boltozat kialakulás és tönkremenetel numerikus szimulációjában – az új modell felhasználásával – elért eredményeimet.

2. Kísérleti vizsgálataim

Kísérleti vizsgálataim során meghatároztam a boltozódási kísérletekben alkalmazott szemcsés anyagok anyag- és tönkremeneteli jellemzőit. Számításaimhoz homogén, izotróp, lineárisan rugalmas kontinuum modellt alkalmaztam, ezért két anyagjellemző értékét kellett meghatároznom minden anyaghalmazra. Az egyik az anyaghalmaz rugalmassági modulusa, másik pedig Poisson-tényezője.

2.1. Anyagjellemzők mérése

A szemcsehalmaz anyagjellezőit – és azok tömörítő erőtől való függését – a tanszékünkön kifejlesztett valódi triaxiális berendezés általam módosított változatával mértem.

A triaxiális berendezésbe helyezett hasáb alakú anyagmintára függőleges terhelést adtam, miközben a felső és az oldalsó lapok elmozdulását mértem. Az így szerzett információkból az anyagminta látszólagos rugalmassági modulusát és Poisson-tényezőjét meg tudtam határozni. Természetesen mindkét mennyiség értéke függött a halmaz öszetömörítésének mértékétől. A végeselem módszerrel végzett későbbi számításaim során az így kapott feszültség–fajlagos nyúlás karakterisztikákat használtam.

A szemcsehalmazbeli terhelési viszonyok pontosabb leírása érdekében módosítottam a triaxiális berendezés felépítését. A korábban alkalmazott nagy merevségű oldalirányú megtámasztások helyett cserélhető, különböző rugómerevségű rugókat használtam. A halmaznál nagyobb merevségű rugók alkalmazásával modellezni tudtam a fal mellett elhelyezkedő anyagminta feszültségviszonyait, míg a halmaz merevségéhez közel álló rugómerevségű megtámasztással a halmaz belsejében kialakuló feszültségviszonyokat mérhettem.

2.2. Tönkremeneteli jellemzők mérése

A természetes boltozatok kialakulását és összeomlását elemzve arra a következtetésre jutottam, hogy két különböző tönkremeneteli folyamat vizsgálatára van szükség.

2.2.1. Nyírási tönkremenetel

3. definíció. (Mohr–Coulomb-féle tönkremeneteli kritérium.) A szemcsehalmaz egy elemi tartományában akkor következik be *nyírási tönkremenetel*, ha található a tartományon átmenő olyan $\mathbf{n}$ normálisú sík, amelyiken a nyírófeszültségek túllépik a σ_n normálfeszültség értékének egy meghatározott hányadát:

$$|\tau_{nm}| \geq \sigma_n \tan\phi, \tag{2.1}$$

ahol ϕ a halmaz belső súrlódási szöge. Amennyiben a szemcsehalmazon belüli c kohézió is létezik, az előbbi összefüggés módosul:

$$|\tau_{nm}| \geq \sigma_n \tan\phi + c. \tag{2.2}$$

A nyírási tönkrementeli határgörbe meghatározásához a talajvizsgálatoknál alkalmazott nyíródoboz *Balássy* által módosított változatát alkalmaztam.

A természetes boltozatok öszeomlási folyamatának elemzése során arra azt tapasztaltam, hogy a tönkremenetel „repedések” szemcsehalmazbeli terejedésének eredménye. A repedésterjedés kérdéskörének elemzéséhez megvizsgáltam – a terhelések és elmozdulások ismeretében – a készülék nyírási zónájában felhalmozódó torzítási energiasűrűség értékét.

2.2.2. Tönkremenetel kéttengelyű feszültségállapotban

Szemcsés anyagok tönkremeneteli tulajdonságai nem csak tömörítő erőktől, hanem a feszültségállapottól is függenek. Szemcsés anyaghalmazok kéttengelyű feszültségállapotban a háromtengelyűhöz tartozó értéknél csak jóval kisebb nyomófeszültséget képesek elviselni.

4. definíció. *Kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremenetelnek* nevezem azt a jelenséget, amikor a kéttengelyű feszültségállapotban levő anyaghalmaz a rá ható terhelések következtében elveszíti terhelhetőségét.

A természetes boltozatok szabad felületének környezetében a szemcsés anyag kéttengelyű feszültségállapotban van. Szükséges volt tehát, hogy a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli jellemzőket meghatározzam, és a boltozódási folyamat során a boltív peremének mechanikai tulajdonságait a kéttengelyű feszültségállapot figyelembevételével vizsgáljam.

A mérés során a triaxiális vizsgálóberendezésbe helyezett anyagmintát terheltem adott nyomóerővel, miközben az oldalirányú megtámasztás miatt keletkező feszültségek akadályozták meg a szemcsehalmaz összeomlását.

Ezután megszüntettem a terhelést, és szabaddá tettem az anyagminta egyik oldalát, majd kezdtem újra ráhelyezni a függőleges terhelést, egészen a szemcsehalmaz összeomlásáig. Tulajdonképpen az előterhelés felvitelével létrehoztam egy „új” anyagot, amelynek a tönkremenetelét vizsgáltam kéttengelyű feszültségállapotban. Rögzítettem a tömörítéshez tartozó feszültségértéket, valamint az adott tömörítéshez tartozó tönkremenetelt okozó feszültséget. A kísérletet megismételtem különböző tömörítő–feszültség értékek mellett.

A vizsgálat során kapott mérési pontokra illesztett függvény grafikonját neveztem a *kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbének.*

2.2.3. A boltozódási folyamat kísérleti vizsgálata

A boltozódási folyamatok valamint a boltozat alakjának vizsgálatához készítettem egy boltozódásvizsgáló berendezést. Vizsgálataim során nedves homokot terheltem különböző felső és oldalsó nyomással. A terhelési viszonyokat minden esetben úgy állítottam be, hogy a függőleges és oldalirányú nyomások aránya a silókban keletkező nyomásarányokhoz közel legyen.

A terhelés felvitele után a boltozódássvizsgáló berendezés kifolyónyílás méretét növeltem az első természetes boltozat kialakulásáig. A boltozat kialakulás folyamatát videokamera segítségével rögzítettem. Ezután a kifolyónyílást tovább növeltem, míg a boltozat össze nem omlott. Az összeomlás folyamatát is videóra rögzítettem.

1. állítás. Kísérleteim során bebizonyosodott, hogy kohézió nélküli anyagok – az általam létrehozott (és a silóbeli értékekhez közeli) terhelési viszonyok mellett – nem boltozódnak. Az anyaghalmaz kohéziója tehát a boltozódási kísérlet kimenetelére fontos hatással bíró faktornak bizonyult.

2. állítás. Megállapítottam, hogy a természetes boltozatok jellemzésére alkalmazható vizsgálati paraméterek : a boltozati magasság és szélesség aránya valamint a maximális boltozat-szélesség.

3. állítás. A boltozódásvizsgáló berendezésben kialakult természetes boltozatok alakja vizsgálataink szerint parabolával jól közelíthető.

Fontos ehhez azonban hozzátenni azt, hogy a stabil természetes boltozatok alakjának meghatározásához figyelembe kellett vennem azt a tényt, hogy a boltív nem közvetlenül az anyaghalmaz határán helyezkedik el. A természetes boltozat határán ugyanis kialakult egy átmeneti zóna, mely nem vett részt a boltozat feletti anyagtömegekből eredő terhelések elviselésében. Ezt a boltozatok stabilitásának vizsgálata során tapasztaltam, amikor az átmeneti zóna eltávolítása a boltozat teherbírását, stabilitását nem befolyásolta.

A videofelvételek szerint a természetes boltozatok mindig a nyílás felett középen található anyagrészek kihullásával alakultak ki. A keletkező boltívek a külső zavaró hatásokkal (ütögetés, kisebb anyagrészek eltávolítása a boltív pereméről) szemben meglehetősen stabilnak mutatkoztak. Az összeomlást előidéző repedések a boltív talppontjából indultak ki, és ezek hatására egymás után több, rövid ideig öntartó boltozat alakult ki, majd egy kritikus nyílásméret elérésével a természetes boltozatok összeomlása az anyag kiömléséhez vezetett.

A boltozódásvizsgáló berendezés segítségével végzett méréseim során a terhelés felvitele után a kifolyónyílás méretét növeltem az első természetes boltozat kialakulásáig. Az első stabil boltozat kialakulása után a kifolyónyílás méretét tovább növeltem, ennek során a boltozatok több lépésben, egyre nagyobb méretűvé váltak, míg végül elértem a kritikus nyílásmérethez tartozó *utolsó stabil boltozatot.*

3. A természetes boltozódás modellje

A természetes boltozódás folyamatának leírásával próbálkozó, szakirodalomban fellelhető analitikus megoldások kudarca azt mutatta, hogy az ilyen jellegű megoldások keresése nem célravezető. A jelenség analitikus úton történő kezelhetőségének biztosításához túl sok önkényes, mechanikailag nem indokolható feltételezéssel kell élni.

4. állítás. A boltozódás szempontjából kritikus nyílásméret számított és mért értékeinek összevetése ad egyedül lehetőséget az elméleti vizsgálatok és a valóságban lejátszódó fizikai folyamat összevetésére.

A jelenség kísérleti úton történő vizsgálata során ugyanis nem vagyunk képesek a halmazbeli feszültségviszonyokat mérésekkel (elfogadható pontossággal) meghatározni, ezért a természetes boltozódás analitikus modelljeiben a feszültségviszonyok számítására tett feltételezések nem is ellenőrizhetők. A boltozat-alak nyomonkövetése sem egyértelmű feladat. Egyetlen dolog van, amit viszonylag könnyen mérhetünk, ez a kritikus nyílásméret.

Vizsgálataim azt mutatták, hogy a boltozódás folyamatának nyomonkövetésére nem emelhetjük ki a halmazból önkényesen pusztán a boltozat környezetét. A természetes boltozódás definíciója módosításra szorult.

5. definíció. *Természetes boltozódásnak* nevezem a szemcsés halmaznak azt az egyensúlyi állapotát, amikor a szemcsés anyag nem áramlik ki a tárolására szolgáló berendezésből a nyitott kifolyónyíláson keresztül. A természetes boltozat kialakulása a halmazt alkotó kontinuumelemek és a tároló falainak egymásra hatása során kialakult, az egész halmazra jellemző egyensúlyi állapot létrejötte.

Ilyen megközelítés esetén pusztán néhány természetes kikötést kellett tennem a halmaz peremén jelentkező feszültségekkel kapcsolatban, a perembe beleértve a természetes boltozattal határolt anyagtartományt is. A boltozat kialakulás valamint összeomlás folyamatát egyértelműen, mechanikai alapelvekből kiindulva meghatározott – és mérhető – feltételek figyelembevételével modellezhettem.

3.1. Boltozódás lapos fenekű tartályokban

Amennyiben a boltozódás jelenségét a teljes halmazra vonatkozó egyensúlyi feladatként kezeltem, akkor a lapos fenekű tartály esete a legegyszerűbben megoldható boltozódási probléma.

A lapos fenékre kidolgozott eljárást a későbbiekben – módosításokkal – kúpos tartályfenék esetére is alkalmaztam.

3.1.1. A természetes boltozat kialakulása

A szemcsehalmazban kialakuló feszültségviszonyok tisztázása érdekében elkészítettem egy siló leegyszerűsített mechanikai modelljét. A geometriai modell egy a vizsgálati síkra merőleges irányban végtelen kiterjedésű téglalap alakú tartomány volt. A tartomány oldalsó és alsó peremén a lineárisan rugalmas kontinuumként modellezett szemcsés anyagnak a határoló felület normálvektorának irányába való elmozdulási lehetőségeit megakadályoztam. Lapos tartályfenék esetében feltételeztem, hogy a boltozódás szempontjából fontos halmazrész a falaktól nagy távolságra helyezkedik el, így a falsúrlódás hatását elhanyagolhattam.

Matematikai szempontból a halmazbeli feszültségviszonyok meghatározása a rugalmasságtan egyenleteinek megoldása, a megfelelő peremfeltételek figyelembevételével:

$$\boldsymbol{F}\cdot\nabla+\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{A}, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{u}|_{A_u} = \mathbf{u}_0, \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}|_{A_p} = \mathbf{p}_0. \tag{3.5}$$

A fenti egyenletrendszert a következő peremfeltételek figyelembevételével oldottam meg:

I. A tartomány két oldalán az elmozdulási vektormező vízszintes komponense zérus $(u_x = 0)$.

II. A tartomány alsó oldalán (a modellsiló alján) az elmozdulásmező függőleges komponense zérus (míg a kifolyónyílás zárva van) $(u_y = 0)$.

III. A felső oldalra ható terhelés értéke zérus $(p_y = 0)$.

A boltozatkialakulás vizsgálatánál kiinduló feltevésem az, hogy a *szemcsés anyagok húzófeszültség elviselésére csak igen kis mértékben képesek.* Ezt felhasználva végeselem módszer segítségével modellezni tudtam a boltozat kialakulás folyamatát.

A boltozatkialakulás nyomon követéséhez elsőként meghatároztam az anyaghalmazban kialakuló $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ feszültségi tenzormezőt zárt kiömlőnyílás esetére.

A zárt kiömlőnyíláshoz tartozó feszültségi tenzormező meghatározása után a kiömlőnyílást valamilyen kezdeti méretre nyitottam, azaz a tároló középvonalától szimmetrikusan, mindkét irányban felmért $d/2$ távolságig megszüntettem az $u_y = 0$ peremfeltételt. Ezután újra megoldottam a differenciálegyenlet rendszert, az előbb módosított peremfeltételek mellett. Ennek eredményeként megkaptam a nyitott kiömlőnyílás esetén kialakuló feszültségviszonyokat.

A számított feszültségi tenzormezőt felhasználva eltávolítottam az anyaghalmazból azt a részt, amelyben húzófeszültségek alakultak ki, hiszen ezek a valóságban kiesnek a tárolóedényből az alsó nyíláson keresztül. A húzott tartományok meghatározásához meg kellett vizsgálnom, hogy az anyag mely tartományában alakultak ki húzófeszültségek. A húzott részek kijelöléséhez megoldottam a főfeszültségek meghatározására szolgáló

$$(\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E})\,\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

egyenletrendszert a halmaz minden elemi tartományának középpontjában. Ahol az egyenletrendszerből meghatározott σ_n értékek bármelyike pozitív, abban az elemi tartományban a halmaz igénybevétele húzás.

6. definíció. *Fajlagos feszültségnek* nevezem a $\frac{\sigma}{\rho g H}$ mennyiséget, ahol H a töltetmagasság.

Az első főfeszültségek eloszlását a kiömlőnyílás feletti magasság függvényében, a modell szimmetriatengelye mentén felfelé vizsgálva azt tapasztaltam, hogy a fajlagos első főfeszültség értéke egy bizonyos magasságban pozitívból negatívba (azaz húzásból nyomásba) megy át.

A valóságban a szemcsés halmazok képesek minimális értékű húzófeszültséget elviselni, tehát az anyagkihullás feltétele: $0 < \sigma_{\text{min}} < \sigma_1$. A minimális elviselhető húzófeszültség értéke elhanyagolhatóan kicsi, de többek között ez okozza a boltozat látszólagos ívének kísérletenként más és más alakját.

A húzó igénybevétellel terhelt elemi tartományokat töröltem a végeselem modellből. Ezután újra meghatároztam – a módosult geometria miatt megváltozott – feszültségviszonyokat, majd újra eltávolítottam a húzott tartományokat.

Végeselem szimulációim azt mutatták, hogy ez az ismétlődés egy bizonyos lépésszám után minden esetben megáll, ugyanis az így növekvő természetes boltozat bizonyos alakja mellett a húzott részek „elfogynak”. Ilyenkor mondhatjuk, hogy elértük az adott d szélességű kiömlőnyíláshoz tartozó természetes boltozatot. *Ez azonban még nem jelenti azt, hogy az így kialakult természetes boltozat stabilis.*

3.1.2. A természetes boltozat összeomlása

5. állítás. Kéttengelyű feszültségállapotban a szemcsés anyaghalmazok nem képesek egy – az előterhelés értékétől is függő – kritikus értéknél nagyobb nyomófeszültség elviselésére. Mindaddig, amíg a boltozat peremének környezetében a sajátértékek (3.6) egyenletből számolt legkisebbike nem lesz kisebb, mint a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség, addig a boltozat nem omlik össze.

A kiömlőnyílás mérete tehát mindaddig növelhető, míg a kialakuló stabil természetes boltozatok peremén a *nyomó*feszültségek nem lépnek túl egy kritikus értéket.

6. állítás. Végeselem módszerrel végzett számításaim szerint a keletkező legnagyobb nyomófeszültségek abszolút értékének maximuma a boltozat talppontjának környezetében van.

Ezzel egybevágnak azok a mérési tapasztalataim, melyek szerint a boltozat-összeomlást okozó „repedések” az esetek nagy többségében a boltozat talppontjának környezetéből indultak.

2. tétel. *A boltozat-összeomlás szükséges feltétele: a boltozat környezetében a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a nyomófeszültségnek túl kell lépnie a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó – az anyagtulajdonságoktól és az előtömörítés mértékétől függő – kritikus értéket.*

A boltozat-tönkremenetel videofelvételeinek elemzése azt mutatta, hogy az összeomlás oka nem lehet kizárólag a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartományok összeroppanása. Egy-egy ilyen anyagtartomány összeroppanása esetenként csak a boltozat méretének kismértékű növekedését okozta. A boltozat ilyen esetekben tovább nőtt – bár most nem a húzott részek kihullásával –, de nem omlott össze.

A halmaz *teljes összeomlásához* szükséges az is, hogy az összeroppanás környezetéből „repedések” induljanak ki, melyek a halmaz belsejébe hatolva végül annak összeomlását okozzák.

A boltozat-összeomlás modeljében szükséges volt tehát a „repedések” továbbterjedésének feltételeit is figyelembe venni.

Feltételeztem, hogy a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus feszültség túllépésének következtében egy, a boltív környezetében található elemi tartomány összeroppant és abban kezdeti „repedések” jelentek meg.

A kezdeti törésvonal továbbterjedésének szükséges feltételét keresve végeselem módszerrel megvizsgáltam a „repedés” környezetében kialakult fajlagos alakváltozási energiamezőt, melynek eredményeként megfogalmaztam a természetes boltozat öszeomlásának elégséges feltételét.

3. tétel. *A természetes boltozat-összeomlásának elégséges feltétele. A bolotzat teljes összeomlásához a boltív mentén, kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a fajlagos torzítási energiasűrűség-intenzitásnak túl kell lépnie egy, az anyagra jellemző kritikus értéket.*

7. definíció. *Kritikus torzítási energiasűrűségnek* neveztem a boltozat összeomlásához szükséges fajlagos torzítási energiasűrűség értékét.

A kritikus torzítási energiasűrűség értékét nyíródobozos vizsgálat segítségével határoztam meg. Megfogalmaztam a természetes boltozatok összeomlásnak szükséges és elégséges feltételét.

4. tétel. *A természetes boltozatok összeomlásának szükséges és elégséges feltétele:*

I. A boltozat környezetében a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a nyomófeszültségnek túl kell lépnie a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó – az anyagtulajdonságoktól és az előtömörítés mértékétől függő – kritikus értéket.

II. Ugyanebben a kontinuumelemben a fajlagos torzítási energiasűrűségnek túl kell lépnie egy, az anyagra jellemző kritikus értéket.

Amennyiben mindkét feltétel teljesül, a természetes boltozat összeomlik, és a szemcsés anyag a tárolóból kifolyik.

A természetes boltozódás vizsgálatához tehát a klasszikus lineárisan rugalmas kontinuum modellt bővíteniem kellett. Feltételeztem, hogy a homogén, izotróp kontinuumként modellezett szemcsés halmaz belsejében hely és orientáció szerint egyenletes eloszlásban repedések találhatók, és ezek a repedések akkor indulnak növekedésnek, amikor az őket tartalmazó kontinuumelemben a fajlagos torzítási energiasűrűség értéke túllép egy, az anyaghalmazra jellemző korlátot.

3.1.3. Boltozódási algoritmus

Az előbb felsorolt eredmények felhasználásával létrehoztam a természetes boltozatok kialakulásának és összeomlásának modelljét.

8. definíció. *Boltozódási algoritmusnak* nevezem az alábbi eljárást.

I. Jelöljük ki a vizsgálni kívánt T tartományt, adjuk meg a modellezni kívánt szemcsés anyag anyag- és tönkremeneteli jellemzőit:

   – a ρ sűrűséget,

   – az E rugalmassági modulust,

   – a ν Poisson tényezőt valamint a

   – a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó $\sigma_K(\sigma_t)$ tönkremeneteli határfeszültség függvényt.

II. Adjuk meg a peremfeltételeket. Zárt és nyitott kifolyónyílás, szükség esetén az oldalfal rugómerevsége c_0, a ϕ_w falsúrlódás is figyelembe vehető itt.

III. Oldjuk meg a rugalmasságtani egyenleteket a peremfeltételek figyelembevételével.

$$\boldsymbol{F}\cdot\nabla+\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{A}, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}|_{A_u} = \mathbf{u}_0, \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}|_{A_p} = \mathbf{p}_0. \tag{3.11}$$

A megoldást célszerű végeselem módszer segítségével, numerikus úton meghatározni.

IV. A feszültségviszonyok ismeretében határozzuk meg a halmaz minden kontinuumelemében a főfeszültségek értékeit az

$$\left(\boldsymbol{F}-\sigma_n\boldsymbol{E}\right)\mathbf{n}=\mathbf{0} \tag{3.12}$$

egyenletek megoldásával.

V. A nyitott kifolyónyílás feletti részből távolítsuk el azokat a kontinuumelemeket, melyekben a sajátértékek legnagyobbika (σ_1) pozitív.

VI. Vizsgáljuk meg a kiömlőnyílás felett kialakult szabad felület környezetében lévő kontinuumelemek mindegyikében σ_K és σ_3 viszonyát[1]. Ha a $\sigma_3 > \sigma_K$ feltétel teljesül minden peremen lévő kontinuumelemben, akkor továbbléphetünk a VIII. pontba. Ha a $\sigma_3 \leq \sigma_K$ feltétel teljesült, akkor a vizsgált kontinuumelem összeroppan.

VII. Ha a fajlagos alakváltozási energiasűrűség ugyanebben a kontinuumelemben elérte az u_K kritikus értéket, akkor a kontinuumelemből repedések indulnak ki, melyek a teljes halmaz összeomlását és az anyag tárolóból való kifolyását idézik elő. Amennyiben a deformációs energiasűrűség nem érte el a kritikus értéket, abban az esetben csak az összeroppant tartományt kell eltávolítanunk a halmazból, majd továbbléphetünk a következő pontba.

VIII. A kihullott részek eltávolítása után kialakult új T tartományra fogalmazzuk meg újra a peremfeltételeket. Az új peremfeltételek ismeretében lépjünk vissza a III. pontra.

7. állítás. A boltozódási algoritmus futása tapasztalataim szerint háromféleképpen végződhet.

- A húzóigénybevételből adódó anyagkihullás addig tart, míg az összes anyagot el nem távolítjuk a tárolóból, azaz amíg a T tartomány el nem tűnik.
- Valamelyik lépésnél a $\sigma_3 \leq \sigma_K$, feltétel teljesül a tartomány alsó peremén lévő valamely kontinuumelemben. Ez a kifolyás megindulását jelenti.
- Bizonyos esetekben az algoritmust addig futtathatjuk, míg a húzott részek elfogynak, és közben a $\sigma_3 > \sigma_K$ feltétel is érvényben marad mindenütt. *Ez stabil természetes boltozatok kialakulását jelenti.*

3.1.4. Boltozódás a garatban

A természetes boltozódás jelenségének garatban történő vizsgálatához elkészítettem egy siló végeselem modelljét.

A modellsiló egy (a függőleges iránytól mérve) $40°$-tól $10°$-ig változtatható hajlásszögű garatból, és egy felette elhelyezett 1m magasságú tárolórészből állt. A silóban sík alakváltozási állapot létrejöttét feltételeztem.

[1] A reláció értelmezésénél ügyeljünk arra, hogy mind σ_3, mind σ_K negatív!

A végeselem modellben a szemcsés anyag silófalra merőleges elmozdulását megakadályoztam. Zárt és nyitott kifolyónyílás mellett meghatároztam a halmazbeli feszültségviszonyokat. Nyitott kifolyónyílás esetén a siló középvonala mentén számított fajlagos harmadik főfeszültség értékében ugrást találtam.

A kifolyónyílás felett, a nyílás mentén keletkező fajlagos főfeszültség értékek vizsgálata pedig azt mutatta, hogy a halmaz tönkremenetele szempontjából figyelmet érdemlő helyek a falak mellett találhatók.

8. állítás. A siló aljának kinyitása után a kifolyónyílás környezetében található szemcsés anyag minden esetben kihullik a silóból.

A kifolyónyílás zárt helyzetében keletkező fajlagos harmadik főfeszültség értéke kisebb volt a nyílás kinyitása után keletkező fajlagos harmadik főfeszültségnél. A siló alján a σ_t háromtengelyű feszültségállapothoz tartozó előtömörítő feszültségnél nagyobb kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó nyomófeszültség keletkezett. A szemcsés anyaghalmazok kéttengelyű feszültségállapotban csak a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó σ_K kritikus nyomófeszültségnél kisebb nyomófeszültséget képesek elviselni. Méréseim és az összes szakirodalmi forrás szerint is minden esetben igaz a $\sigma_K < \sigma_t$ reláció. A kifolyónyílás feletti anyagtartományban található kontinuumelemek ennek következtében összeroppantak, és a nyitott kifolyónyíláson keresztül kiestek a silóból.

Az összeroppant anyagtartomány eltávolítása után megmaradt anyagrészre elvégzett végeselemes számításaim szerint a garatbeli anyagrészekben a σ_3 nyomófeszültségek értéke nőtt.

Az előtömörítő feszültségek megnövekedésével (mely a halmaz terhelhetőségét is növeli) egyidőben a fal közelében továbbra is igaz maradt a – az összeroppant tartomány kihullása után – kéttengelyű feszültségállapotba került anyagrészekre a $\sigma_K < \sigma_t$ reláció. A garatban boltozódás tehát nem jöhetett volna létre, hiszen a garatban minden anyagtartomány összeroppant volna mindaddig, amíg az anyaghalmaz által átívelt nyílásméret – a kúpos garatban felfelé haladva – olyan naggyá nem vált volna, hogy az anyaghalmaz középvonalában már húzófeszültségek jelentek volna meg[2], amelyek szintén a szemcsés halmaz kihullását okozták volna. A silónak tehát *minden esetben ki kellett volna ürülnie, boltozódás nélkül.* A kísérleti tapasztalatok szerint ez az állítás nyilvánvalóan nem igaz.

A most felmerült látszólagos ellentmondás feloldásának érdekében részletesebben megvizsgáltam a silóbeli feszültségviszonyokat.

A modellsilóbeli szemcsés halmaz tömörödését – majd kéttengelyű feszültségállapotban tönkremenetelét – okozó fajlagos harmadik főfeszültségek eloszlását vizsgálva

[2] Végeselem módszerrel végzett vizsgálataim szerint bizonyos nyílásméret felett ezek a húzófeszültségek mindig megjelentek.

a függőleges falakkal határolt rész és a garat csatlakozásának környezetében – az átmeneti tartományban – kiugróan magas fajlagos harmadik főfeszültség értéket tapasztaltam. Hozzávetőleg a garat magasságának felénél a fajlagos harmadik főfeszültségnek pedig helyi minimuma volt. Különböző anyagjellemzők és geometriai viszonyok mellett lefuttatott végeselem számításaim is hasonló jellegű feszültség eloszlásokat mutattak.

9. állítás. A siló fala mentén számított $\frac{\sigma_3}{\rho g H}$ fajlagos harmadik főfeszültség-függvény az átmeneti tartományban maximális értékét, a garat-magasság felének közelében pedig minimumát veszi fel.

9. definíció. *Feszültséghányadosnak* nevezem a garatban számított minimális és az átmeneti tartományban számított maximális harmadik főfeszültség hányadosát.

Miután az összeroppant szemcsés anyaghalmaz silóból történő kihullása megkezdődik, a garat üresen maradt részére újabb anyagrétegek kerülnek; a silóban lévő szemcsés anyag elkezd a falak mentén lefelé csúszva mozogni. Mivel az anyagkihullás és a halmaz lefelé mozgása együtt zajlik le, ezért feltehető, hogy a garat nem ürül ki teljes mértékben.

Az eddigiek alapján azt feltételeztem, hogy az átmeneti tartományban számított maximális fajlagos harmadik főfeszültség tekinthető a halmazra háromtengelyű feszültségállapotban ható előtömörítő feszültségnek. A garatban számított minimális nyomófeszültség pedig tekinthető – az anyagkihullás miatt – a halmazra kéttengelyű feszültségállapotban ható nyomófeszültségnek. Mindezek alapján megfogalmazhattam a garatbeli boltozódás szükséges feltételét.

5. tétel. *A garatban akkor alakulhat ki természetes boltozat, ha az átmeneti tartományban mérhető σ_3 maximális előtömörítő feszültségből meghatározott σ_K kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség értéke nagyobb, mint a garatban kialakuló minimális harmadik főfeszültség abszolút értéke.*

Vizsgálataim során nem vettem figyelembe azt az előtömörítő hatást, amely a szemcsés anyag silóba történő betárolása során éri az anyagot. Amennyiben ez a dinamikus hatásokból eredő előtömörítés elég nagy, megtörténhet, hogy a kifolyónyílás kinyitása után a garat fala mentén keletkező nyomófeszültségek nem elegendőek a kéttengelyű feszültségállapotba került anyag összeroppantásához. A szemcsés anyag ebben az esetben egyáltalán nem hullik ki a tárolóból. Az így kialakult „boltozat” azonban nem stabilis. Ennek az összetömörödött tartománynak a megbontása után a kiáramlás megkezdődik, és az ezt követő esetleges boltozódási jelenségek az előbbiekben leírtak szerint mennek végbe.

10. állítás. Végeselem módszerrel végzett számításaim szerint az átmeneti tartományban számított maximális feszültség és a garatban számított minimális feszültség hányadosaként meghatározott mennyiség a kifolyónyílás méretének csökkenésével csökken.

Megvizsgálva a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbe és feszültséghányados kapcsolatát, háromféle eredménnyel találkoztam. Amennyiben a feszültséghányados-függvény grafikonja a tönkremeneteli határgörbe felett halad, akkor a garatban természetes boltozatok nem jelentek meg. Fordított esetben, ha a feszültséghányados-függvény grafikonja a tönkremeneteli határgörbe alatt halad, abban az esetben a garatbeli szemcsés anyag boltozódott. Találkoztam olyan esettel is, melynél a feszültséghányados-fügvény grafikonja metszette a tönkremeneteli határgörbét. Ilyen esetben a metszéspont ismeretében kijelölhettem a feltételezett kritikus nyílásméret értékét.

Tapasztalataim szerint, a feszültséghányados értékek egy kritikus α_K kifolyónyílás félkúpszög esetén mintegy rásimulnak a tönkrementeli határgörbére. A kritikusnál kisebb félkúpszög esetén a számítási eredmények a tönkremeneteli határgörbe feletti pontokat adtak, ellenkező esetben pedig a pontok a tönkremeneteli határgörbe alá kerülnek. Ez azt jelenti, hogy az garat félkúpszög a boltozódás szempontjából kritikus érték. α_K-nál kisebb kúpszögű tárolóedényből az anyag kiáramlik, nagyobb félkúpszög esetén pedig várható a természetes boltozódás jelensége. A kritikus félkúpszög értéke az anyag kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbéjétől függ.

Az α_K-val megegyező és annál nagyobb félkúpszögű tartályokban kialakuló boltozódási jelenségek vizsgálatára alkalmaztam a lapos fenekű tartályoknál tárgyalt, a boltozat kialakulással kapcsolatos energetikai megfontolásokat.

11. állítás. Számításaim szerint a fajlagos alakváltozási energiasűrűség értékének maximuma a garatban is a boltozat talppontjának környezetében található.

12. állítás. A maximális fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke a kifolyónyílás méretének növelése esetén nő.

A tönkremeneteli határgörbe és a feszültséghányados kapcsolata alapján azt mondhattam, hogy α_K-nál nagyobb vagy egyenlő félkúpszögű garatban a szemcsés halmaz a garat-magasság felének környezetében egy, a természetes boltozódás szempontjából kritikus állapotban van. A feszültséghányados a tönkremeneteli határgörbe által meghatározott kritikus értékhez közeli értéket vesz fel. Így *a garatban természetes boltozatok – a kritikusnál nagyobb félkúpszög esetén – a kifolyás során mindig kialakulnak*. A boltozatok stabilitása viszont a fajlagos alakváltozási energiasűrűségnek a boltozat talppontjánál jelentkező maximumának értékétől függ.

Amennyiben a fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke túllép egy kritikus értéket, a kialakult boltozatok összeomlanak. Az szemcsés anyag tehát kiömlik a tárolóedényből, de a kifolyás természetes boltozatok kialakulásának és összeomlásának folyamataként zajlik le.

6. tétel. *A garatbeli boltozódás szükséges és elégséges feltétele. A garatban természetes boltozatok alakulnak ki, ha*

I. a feszültséghányados értéke kisebb, mint a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus érték;

II. a kialakult boltozat talppontjában mérhető fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke kisebb, mint a halmazra jellemző kritikus érték.

Vizsgálataim során azt tapasztaltam, hogy a szemcsehalmaz és silófal közötti μ súrlódási együttható, a szemcsehalmaz ρ sűrűsége, a szemcsehalmaz E látszólagos rugalmassági modulusa, a szemcsehalmaz ν Poisson tényezője valamint a töltet H magassága van hatással a halmaz boltozódási hajlamára:

– a falsúrlódás értékének növekedése kismértékben csökkenti,

- a fajsúly növekedése csökkenti,

– a látszólagos rugalmassági modulus értékének növekedése növeli

– a Poisson tényező növekedése pedig csökkenti,

a szemcsés halmaz boltozódási hajlamát.

Kritikus kifolyónyílás mért értékeit, az irodalomban található legjobb becslések értékét, valamint saját eredményeimet összevetve azt tapasztaltam, hogy míg az irodalmi forrásokban található becslések a mért kifolyónyílásmretek két-háromszorosai, addig *az általam létrehozott eljárással a hibát minden esetben ötven százalék alá sikerült szorítani.*

4. Új tudományos eredmények

Mérések és numerikus szimulációk segítségével vizsgáltam szemcsés halmazok természetes boltozódását. Megadtam a természetes boltozatok kialakulásának szükséges és elégséges mechanikai feltételét. Mérések és numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsehalmazban kialakult természetes boltozatok összeomlásának mechanikai feltételeit. Valódi triaxiális berendezésen végrehajtható mérési eljárást adtam meg szemcsés halmazok boltozódási tulajdonságainak kísérleti vizsgálatára. Triaxiális kísérleti berendezés felépítésének módosításával lehetővé tettem a szemcsehalmazból kiemelt minta környezetének mechanikai hatásának figyelembevételét az anyag- és tönkremeneteli jellemzők mérése során.

I. Mérésekkel és numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a homogén, lineáris, izotróp anyagmodell alkalmas a szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának modellezésére.

II. Lapos fenekű tartály esetén mérésekkel és a mechanikai jelenséget leíró differenciálegyenletek numerikus megoldásával igazoltam, hogy a természetes boltozatok szemcsés halmazokban történő kialakulásának szükséges feltétele az, hogy a terhelések hatására kialakuló feszültségi tenzormezőnek a halmaz nyitott kiömlőnyílás feletti részében pozitív sajátértékei legyenek.

III. Numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsés halmazok lapos fenekű tartályokban történő boltozódásának folyamatát.

IV. Kúpos kiömlőnyílású tartály (garat) esetén mérésekkel és a mechanikai jelenséget leíró differenciálegyenletek numerikus megoldásával igazoltam, hogy a természetes boltozatok szemcsés halmazokban történő kialakulásának szükséges feltétele az, hogy az átmeneti tartományban mérhető σ_3 maximális előtömörítő feszültségből meghatározott σ_K kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség értéke nagyobb legyen, mint a garat falánál számított minimális harmadik főfeszültség értéke.

V. Numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsés halmazok garatbeli boltozódásának folyamatát.

VI. Mérésekkel igazoltam, hogy a szemcsehalmazban kialakuló természetes boltozatok alakja parabolával kellő pontossággal közelíthető.

VII. Numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a szemcsés halmazokban kialakult természetes boltozatok stabilitásának mértéke jellemezhető a természetes boltozat talppontjának környezetében felhalmozódó fajlagos alakváltozási energia értékével.

VIII. Mérésekkel és numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a természetes boltozatok összeomlásának szükséges feltétele (mind lapos, mind kúpos kiömlőnyílás esetén) az, hogy a természetes boltozatok talppontjának környezetében kialakuló feszültségi mező legkisebb sajátértéke túllépjen egy mérésekkel meghatározható korlátot.

IX. Mérési eljárást adtam meg a szemcsés halmazok kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus feszültségének meghatározására valódi triaxiális berendezés segítsével.

5. Summary

Arching means the formation of a material layer in the granular assembly – caused by the load acting on it – which is capable to bear the load arising from the material above.

The appearance of arches on the one hand holds up the flow of granular material (e.g. the discharge of containers), and on the other hand results overload on the container walls, sometimes causing the collapse of the container.

5.1. Summary of the research activity

In my dissertation I pointed out, that it is more appropriate to treat the arching phenomenon as an equilibrium state of the whole assembly, and because of this I gave a new definition of arching.

In my definition *arching* means an equilibrium state of the whole assembly, when the granular material does not flow out from the container through the open outlet. The formation of an arch is an equilibrium state evolving as a result of the interaction between the container wall and the continuum elements of the granular assembly.

I created a new model of the arching phenomena. With the use of this new model, my estimations were in better correlation with the measurements, than the results found in the literature. In my dissertation I:

I. presented the material and failure criteria used in the continuum model of granular assemblies,

II. summarized the results found in the literature dealing with the stresses arising in granular assemblies and the modelling of the arching phenomena,

III. presented the measurement methods and apparatuses used for the determination of the material- and failure properties,

IV. presented my new arching examining apparatus and my modifications on the triaxial apparatus,

V. introduced a new model of the arch formation and collapse, using the results of my arching measurements,

VI. introduced my results in the numerical simulation of the arching phenomena, using my new model.

5.2. New scientific results

Using measurements and numerical simulations I analyzed the arching action in granular assemblies, gave the necessary and sufficient conditions for the formation of arches. With the use of measurements and numerical simulations I determined the mechanical condition of the arch collapse, using triaxial apparatus I defined a measurement method for the determination of the arching properties of granular materials. With the modification of the triaxial apparatus, I made it possible to take into account the mechanical impact of the neighboring material during the measurement of the mechanical and failure properties of the sample.

I. Using measurements and numerical simulations I proved that the homogenous, isotropic material model is capable to model the arching action in granular assemblies.

II. Solving the differential equations describing the mechanical phenomena, and carrying out measurements I proved, that the necessary condition for the arch formation in granular assemblies is to have positive eigenvalues over the open outlet in the stress tensor field arising in the assembly because of the load.

III. With the use of numerical simulations I determined the arching process in flat bottomed bins.

IV. Using measurements and solving the differential equations describing the mechanical phenomenon I proved, that the necessary condition of the arch formation in hoppers is that the σ_K critical biaxial compressing stress evaluated at the transition zone from σ_3 maximal pre-compressing stress must be higher, than the minimal third main stress evaluated at the hopper vall.

V. With the use of numerical simulations, I determined the arching process at the hopper.

VI. Using measurements I proved, that the shape of arches can be approximated with parabola.

VII. With the use of numerical simulations I proved, that the stability of arches can be characterized using the value of specific deformation energy accumulated at the arch basement.

VIII. Using measurements and numerical simulations I proved, that the necessary condition of arch collapse (in case of flat bottomed bins and also in case of hoppers) is that the smallest eigenvalue of the stress field at the arch basement have to overrun a critical value, which value can be evaluated with measurements.

IX. I developed a measurement method for the evaluation of the critical compressing stress belonging to biaxial stress state with triaxial apparatus.

6. A kutatás témakörében készült saját és társszerzős munkák

6.1. Folyóirat cikkek

I. **Keppler István**: *Szemcsés anyagok természetes boltozódása*. GÉP folyóirat, 2006. I. p. 29-33.

6.2. Konferenciák nyomtatásban megjelent anyaga

I. **Keppler István**: *Boltozódásvizsgálatok*. MTA-AMB XXII. Kutatási és Fejlesztési Tanácskozás, Gödöllő, 1998.

II. Csizmadia B. - Csorba L. - **Keppler I.**: *Természetes boltozódás kísérleti és numerikus modellezése.* VIII. Magyar Mechanikai Konferencia 1999. Az előadások összefoglalói. Miskolc. p. 19.

III. Csizmadia B., Szüle Zs., **Keppler I.** , Németh Cs.: *Szemcsés anyagok kifolyási és boltozódási tulajdonságai I.* MTA-AMB XXIV. Kutatási és Fejlesztési Tanácskozás, Gödöllő, 2000. január 18-19. III.228-234.

IV. Csizmadia B. - **Keppler I.**: Néhány gondolat a szemcsés anyagok természetes boltozódásának modellezési lehetőségeiről. Fiatal Műszakiak Tudományos ülésszaka, Kolozsvár, 2000. március 24-25. FMTÜ 2000 kiadványa p. 41-44.

V. **Keppler István**: *Szemcsés anyagok természetes boltozódása és a tönkremeneteli jellemzők kapcsolata.* Fiatal Műszakiak Tudományos ülésszaka, Kolozsvár, 2003. március 21-22. FMTÜ 2003 kiadványa p. 161- 164.

VI. Csizmadia B. - **Keppler István**: *Mechanics of granular materials. Arching theories and experiments.* International multidisciplinary conference. May 23 - 24 2003 Baia Mare, Romania North University of Baia Mare Scientific bulletin Serie C, Volume XVII, Part II. p. 103 - 108.

VII. Csizmadia B. - Oldal I. - **Keppler I.**: *Quasi-Triaxial apparatus for the determination of mechanical properties of granular materials.* 20th. Danubia - Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics, September 24 - 27, 2003 Győr, Hungary.

VIII. **Keppler István**: *Természetes boltozódás modellezése végeselem módszerrel.* MTA-AMB XIX. Kutatási és Fejlesztési Tanácskozás, Gödöllő, 2005.

IX. **Keppler István**: *Természetes boltozatok kialakulásának és tönkremenetelének végeselem modellje.* Fiatal Műszakiak Tudományos ülésszaka, Kolozsvár, 2005. március 18-19. FMTÜ 2005 kiadványa.

X. **Keppler István**: *Finite element simulation of arching in granular assemblies.* 4th YSESM, Castrocaro Terme, Italy, 2005. 05. 07. Az YSESM4 Kiadványa.

XI. **Keppler István**: *Mathematical modelling of arch formation in granular materials.* International multidisciplinary conference. 2005 Baia Mare, Romania. Az IMC kiadványa.

XII. **Keppler István**: *Szemcsés halmazok Mohr-Coulomb féle nyírási tönkremenetelének elemzése.* Fiatal Műszakiak Tudományos ülésszaka, Kolozsvár, 2006. március 24-25. FMTÜ 2006 kiadványa.

XIII. **Keppler István**: *Finite element model of arching in silos.* 5th YSESM, Púchov, Slovakia, 2006. 05. 10. Az YSESM5 Kiadványa.